

Riešenie exponenciálnych rovníc logaritmovaním

Úloha 1: riešte rovnicu

$$2^{x-3} = 5$$

Hneď vidíme, že rovnicu nie je možné riešiť úpravou na spoločný základ, lebo číslo 5 nevieme zapísať ako mocninu čísla 2.

$$2^{x-3} = 2^{???}$$

Riešenie č. 1

V tomto jednoduchom prípade (tí, ktorí majú lepšie kalkulačky) môžeme zaviesť substitúciu a využiť definíciu logaritmu.

$$\text{subst. } x - 3 = y$$

$$2^y = 5$$

odkiaľ z definície logaritmu ($y = \log_a x$ práve vtedy, keď $a^y = x$)

$$\log_2 5 = y$$

$$y = 2,32$$

$$\text{zo substitúcie potom } 2,32 = x - 3$$

$$x = 5,32 \quad (\text{koreň zaokrúhlený na 2 desatinné miesta})$$

Riešenie č. 2

Obe strany rovnice zlogaritmuje (logaritmom so základom 10, lebo ten je na každej kalkulačke)

$$2^{x-3} = 5 \quad / \log$$

$$\log 2^{x-3} = \log 5 \quad / \text{využijeme tretiu vetu o logaritmoch } (\log_a r^s = s \cdot \log_a r)$$

$$(x - 3) \cdot \log 2 = \log 5 \quad / : \log 2$$

$$x - 3 = \frac{\log 5}{\log 2} \quad / + 3$$

$$x = \frac{\log 5}{\log 2} + 3 \quad / \text{ na kalkulačke vyčíslim logaritmy so základom 10}$$

$$x = \frac{0,699}{0,301} + 3$$

$$x = 5,32$$

Druhý spôsob riešenia je univerzálnejší, použiteľný aj pri náročnejších rovniciach.

Úloha 2: riešte rovnicu

$$3^{2x-1} = 2 \cdot 5^x \quad / \log$$

$$\log 3^{2x-1} = \log (2 \cdot 5^x) \quad / \text{ prvá veta o logaritmoch } \log (r \cdot s) = \log r + \log s$$

$$\log 3^{2x-1} = \log 2 + \log 5^x \quad / \text{ tretia veta o logaritmoch } \log_a r^s = s \cdot \log_a r$$

$$(2x-1) \cdot \log 3 = \log 2 + x \cdot \log 5 \quad / \text{ členy s x-ami na jednu stranu, ostatné na druhú}$$

$$2x \log 3 - \log 3 = \log 2 + x \cdot \log 5$$

$$2x \log 3 - x \log 5 = \log 2 + \log 3$$

$$x \cdot (2 \log 3 - \log 5) = \log 2 + \log 3$$

$$x = \frac{\log 2 + \log 3}{2 \log 3 - \log 5} \quad / \text{ a vyčíslim na kalkulačke, zaokrúhlím podľa pokynov}$$

$$x = 3,048$$